ECON 2200, Flervariabel maksimering og omhylning - Handout

Kjell Arne Brekke

February 8, 2012

1 Innledning

Samme oppfordring som vanlig: Prøv deg på oppgavene før forelesningen, men fortvil ikke om du ikke får det til, dette skal jeg gå gjennom.

2 Innledning: Et problem uten bibetingelser

En bedrift har 500 enheter av en innsatsfaktor, men kan i tillegg kjøpe og selge den samme faktoren til en pris λ. Bedriften har to produksjonsanlegg med produktfunksjoner

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 20\sqrt{x_1} \\ f_2(x_2) &= 10\sqrt{x_2} \end{aligned}$$

der total bruk av faktoren blir $x_1 + x_2$ og det overskytende $(500 - x_1 - x_2)$ kan selges (om det er negativt, betyr det at bedriften må kjøpe mer). Prisen på produktet som produseres er 1.

Bedriftens profittfunksjon blir nå

$$\pi(x_1, x_2) = 20\sqrt{x_1} + 10\sqrt{x_2} + \lambda(500 - x_1 - x_2)$$

Oppgave 1 *Hvilket stasjonærpunkt har* π

1. Stasjonærpuntet er $x_1 = \frac{100}{\lambda^2}$ og $x_2 = \frac{25}{\lambda^2}$
2. Stasjonærpuntet er $x_1 = \frac{100}{\lambda}$ og $x_2 = \frac{25}{\lambda}$
3. Stasjonærpuntet er $x_1 = \frac{10}{\lambda}$ og $x_2 = \frac{5}{\lambda}$

Bemerk: Uansett hvilket svar som er riktig, så vil det totale forbruket av innstasfaktorer avhengen av λ. De tre svaralternativen gir

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{125}{\lambda^2} \text{ for alternativ 1} \\
x_1 + x_2 &= \frac{125}{\lambda} \text{for alternativ 2} \\
x_1 + x_2 &= \frac{15}{\lambda} \text{for alternativ 3}
\end{aligned}
$$

Om alternativ 1 er riktig ser vi at dersom $\lambda = 0.5$ ville bedriften bruke akkurat 500 enheter.

3 Maksimering med bibetingelser

Vi skal nå maksimere med en bibetingelse, nemlig at

$$x_1 + x_2 = 500$$

Men nå antar vi at bedriften ikke kan kjøpe eller selge, men må velge slik at $x_1 + x_2$ blir akkurat lik 500. Fra regnestykket ovenfor husker vi at dette er akkurat det antallet enheter som bedriften ville ha brukt dersom prisen λ var akkurat så stor at $x_1+x_2 = 500$, i alternativ 1gir det $\lambda = 0.5$, og det er lett å se at $\lambda = 0.25$ villle vært riktig om det var alternativ 2 som var det rette svaret. Både i alternativ 1 og 2 ville løsningen over vært

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{100}{0.25} = 400 \\
x_2^* &= \frac{25}{0.25} = 100
\end{aligned}
$$

Vi skal vise på forelesning at dette faktisk er en løsning på problemet med bibetingelse.

4 Lagranges metode

Det vi nettopp har gjort, er et eksempel på en metode som kalles for Lagrangemultiplikatorer:

Når vi skal maksimere (hhv. minimere) $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = c$ kan vi late som om bibetingelsen ikke er absolutt, men kan overskrides til en gitt pris, at vi kan øke c til en enhetspris λ. Dvs vi maksimerer (minimerer) det vi kalle Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Så må vi velge "prisen" λ rett slik at det er optimalt å velge akkurat slik at

$$g(x, y) = c.$$

Forutsatt indre løsning, gir dette tre ligninger i de tre ukjente (x, y, λ): $\mathcal{L}'_x = 0$, $\mathcal{L}'_y = 0$ og $g(x, y) = c$.

Eksempel

$$\text{minimer } x + 2y \text{ under bibetingelsen } xy = 8$$

Lagrangefunksjonen blir da

$$\mathcal{L}(x, y) = x + 2y - \lambda(xy - 8)$$

Vi finner stasjonærpunktene til lagrangefunksjonen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x(x, y) &= 1 - \lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y) &= 2 - \lambda x = 0 \end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\lambda} \\ x &= \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

som gir

$$x = 2y.$$

Dette setter vi inn i bibetingelsen

$$\begin{aligned} xy &= 8 \\ (2y)\, y &= 8 \\ y &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Stasjonærpunktet er altså $x = 4$ og $y = 2$, som faktisk er løsningen på problemet.

Oppgave 2 *Gjenta regnestykket ovenfor nå med bibetingelsen $xy = 50$, altså*

$$\textit{minimer } \; x + 2y \; \textit{ under bibetingelsen } xy = 50$$

Sett opp Lagrangefunksjonen og finn stasjonærpunktene på samme måte som ovenfor. (Hint: Merk at regnestykket blir praktisk talt identisk fram til "Dette setter vi inn i bibetingelsen".)

1. Svaret blir $x = 10$ og $y = 5$
2. Svaret blir $x = 5$ og $y = 10$
3. Svaret blir $x = 25$ og $y = 2$

Merk: Metoden fungerer på både maksimerings- og minimeringsproblemer.